

SCA-4011 Hiver 2011: Modélisation numérique des écoulements continus et discontinus

SCA-4011 Modélisation numérique des écoulements géophysiques

- **But du cours**
 - Introduction à l'analyse numérique appliquée à la résolution des équations gouvernant l'atmosphère
 - Éléments de base: interpolation, différentiation et intégration numérique
 - Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires
 - Solution approximées aux équations aux dérivées partielles: applications aux écoulement géophysiques
 - Equation d'advection
 - Résolution par différentes méthodes
 - Méthodes **spectrales**
 - Représentation en série de Fourier sur un plan

SCA-4011 Méthodes numériques (Pierre Gauthier, Hiver 2011)

Références

- Présentations
 - <http://people.sca.uqam.ca/~gauthier/>
- APPLICATIONS AUX ÉCOULEMENTS GÉOPHYSIQUES
 - Durran, D.R., 1998: *Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics*. Ed. Springer-Verlag, 482 pages.
 - Haltiner, G.J. et R.T. Williams, 1980: *Numerical prediction and dynamic meteorology*. Ed. John Wiley & Sons, 477 pages.
 - Kalnay, E., 2003: *Atmospheric modeling, data assimilation and predictability*. Cambridge University Press, 341 pages.
 - Robert, A.: Notes de cours
- Général
 - Fortin, André, 2008: *Analyse numérique pour ingénieurs*. 3^e Edition, Presses internationales, Polytechnique, Montréal. 487 pages
 - Burden, R.L., J.D. Faires et A.C. Reynolds, 1978: *Numerical analysis*. Ed Prindle, Weber et Schmidt, 579 pages

Références

- Notes du cours de formation du ECMWF (European Centre for Medium-range Weather forecasts)
 - Simmons, Adrian J., 1994: Adiabatic formulation of large-scale models: finite difference schemes for the horizontal discretization. Lecture notes for the ECMWF Training course on *Numerical methods and adiabatic formulation of models*
 - Riddaway, R.W. and M. Hortal, 2001: Numerical methods. Lecture notes for the ECMWF Training course on *Numerical methods and adiabatic formulation of models*
 - Davies, T., 2002: Adiabatic formulation of models. Lecture notes for the ECMWF Training course on *Numerical methods and adiabatic formulation of models*
 - Miller, M., 2002: Atmospheric waves. Lecture notes for the ECMWF Training course on *Numerical methods and adiabatic formulation of models*
- Voir: http://www.ecmwf.int/newsevents/training/lecture_notes/LN_NM.html
- Présentations du cours disponibles sous <http://people.sca.uqam.ca/~gauthier/>

Horaire de cours et évaluation

- Horaire
 - Local PK-S1590 MERCREDI: 15:00-16:30
 - VENDREDI: 10:00-11:30
- Evaluation
 - Travaux pratiques 30%
(programmation Scilab)
 - Examen No.1 : 20%
 - Examen No.2: 20%
 - Examen Final : 30%
- Website Scilab: <http://www.scilab.org/> SCILAB version 5.2.0
 - Logiciel et documentation
 - Disponible au Laboratoire informatique de l'UQAM

SCA-4011 Hiver 2011: Modélisation numérique des écoulements continus et discontinus

Equations primitives

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\Omega \times \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

- Equation du mouvement
 $\mathbf{v} = (u, v, w)$: vent
 p : pression ρ : densité de l'air
 $2\Omega \sin \varphi$: paramètre de Coriolis

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt}$$

- Equation thermodynamique
 $\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R/c_p}$ θ : température potentielle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

- Equation de continuité

$$p = R \rho T$$

- Equation d'état des gaz

- Equation hydrostatique

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

- Dérivée matérielle

taux de changement dans un référentiel se déplaçant avec un élément de fluide

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

- Variables

u, v, p, ρ, θ : définies sur une grille horizontale de $N_x \times N_y$ points et N_k niveaux ($\sim 10^6$)

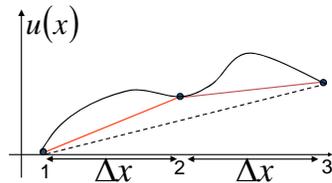
Méthodes numériques appliquées à la résolution d'écoulements géophysiques

- Discretisation des équations gouvernant les écoulements atmosphériques

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 = \frac{u_2 - u_1}{\Delta x}$$

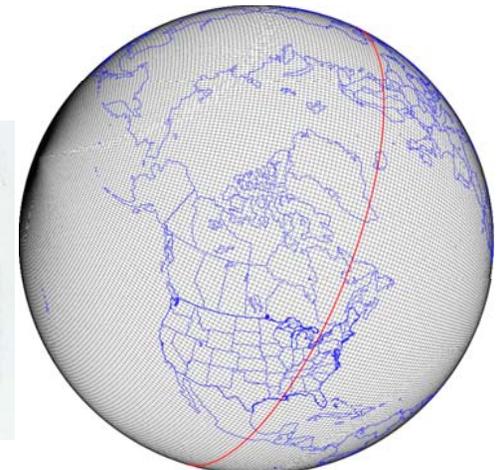
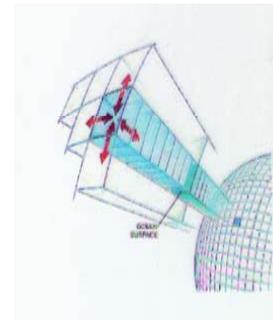
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 = \frac{u_3 - u_1}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 = \frac{u_3 - u_2}{\Delta x}$$



Grille du modèle opérationnel du Service Météorologique du Canada en configuration globale

Nombre de variables associées à la résolution de ce problème: $>10^7$



SCA-4011 Hiver 2011: Modélisation numérique des écoulements continus et discontinus

L.F. Richardson (1922)

Les modèles de prévision numérique sont complexes et demandent une quantité phénoménale de calculs mathématiques pour être exécutés.

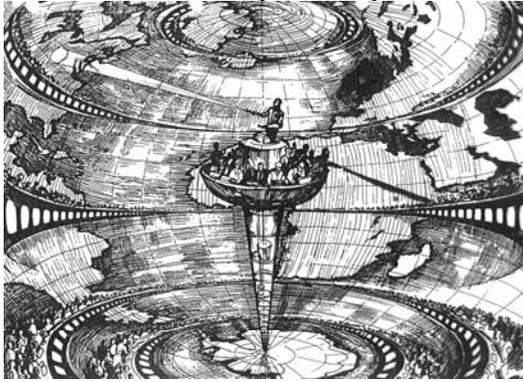
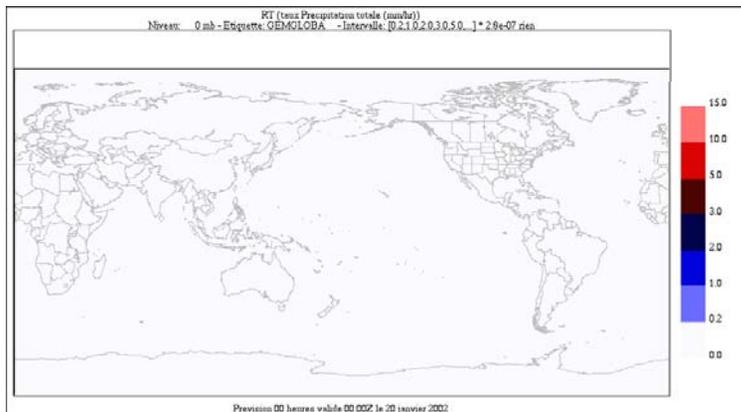


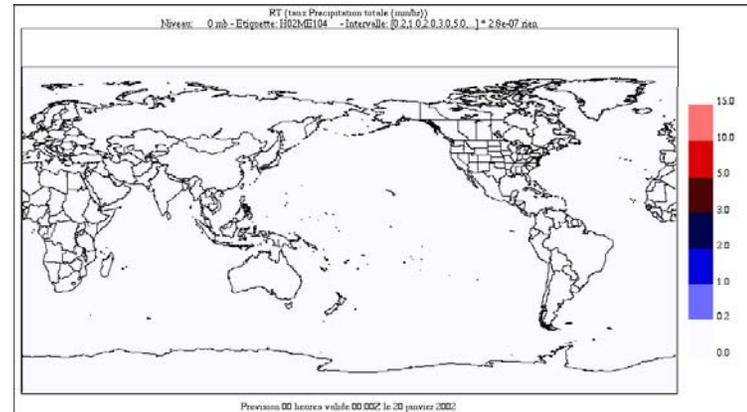
Figure 24 : L'usine à prévision de Lewis Fry Richardson.
(Source : J. C. André, - Pour demain, la prévision du temps et du climat -, *Cahiers du MURS*, 1^{er}-2^e trimestres 1991, p. 27-49.

- Système d'équations nonlinéaires
 - si X_1 et X_2 sont deux solutions, $\alpha X_1 + \beta X_2$ n'est pas une solution du système.
- Discrétisation de ces équations et résolution sous une forme approximée
- Richardson (1922)
 - discrétisation des équations et produit une prévision en intégrant *manuellement* ces équations
 - produit une prévision de 6 heures en 6 semaines.
 - solution complètement irréaliste (pression chutait de 145 hPa en 6 heures)
- von Neumann, Charney et Fjörtoft (1950)
 - première prévision numérique du temps

Modèle opérationnel 2006 ($\Delta x \sim 100$ km) Evolution du taux de précipitation sur 5 jours

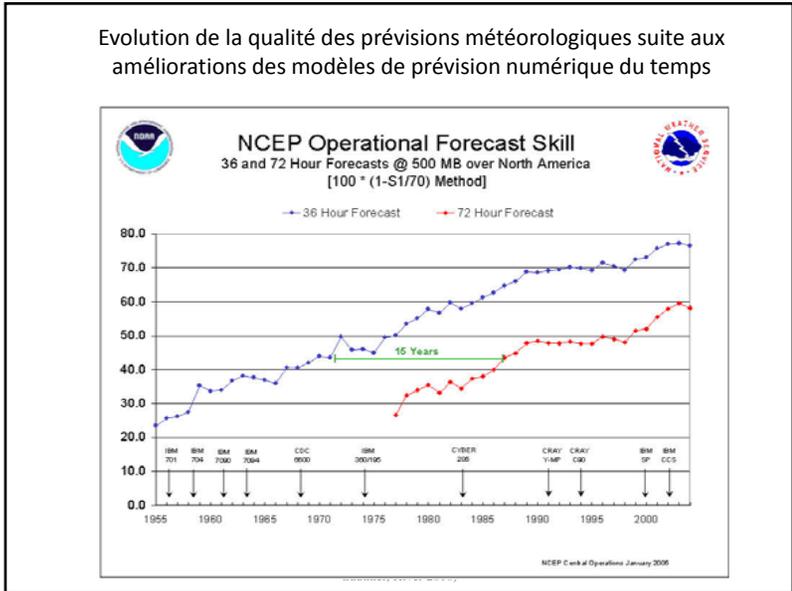
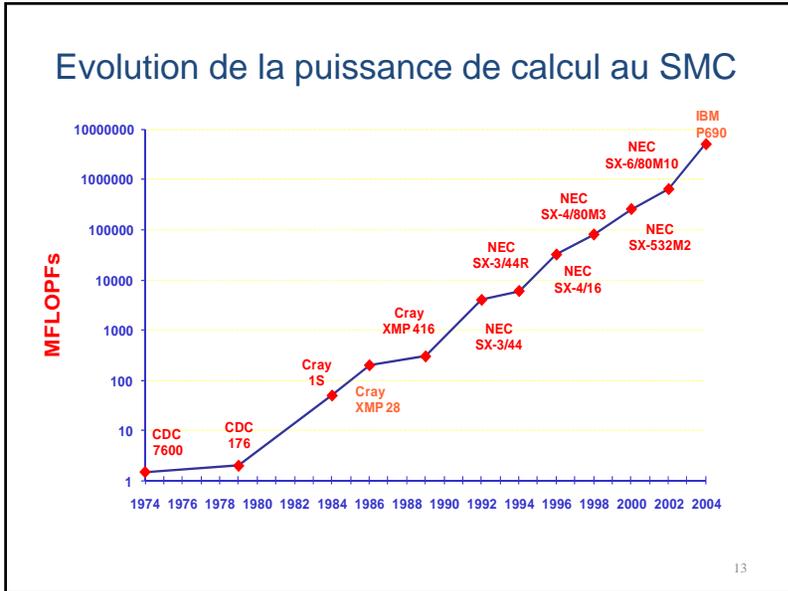


Modèle opérationnel 2007 ($\Delta x \sim 40$ km) Evolution du taux de précipitation sur 5 jours



SCA-4011 Méthodes numériques (Pierre Gauthier, Hiver 2010)

SCA-4011 Hiver 2011: Modélisation numérique des écoulements continus et discontinus



- ### Types d'erreurs associées à la représentation numérique
- Erreurs de modélisation
 - Approximations introduites dans la formulation même du modèle (e.g., approximation hydrostatique, quasi-géostrophique)
 - Erreur de troncature
 - Reliées à la discrétisation du problème
 - Approximations de fonctions continues par un développement en série de Taylor ou de Fourier qui ne comprend qu'un nombre fini de termes
 - Erreur de représentation
 - Représentation discrète des nombres sur ordinateur qui limite la précision avec laquelle on peut représenter un nombre réel

ARITHMÉTIQUE EN POINT FLOTTANT

Méthodes Numériques

Quelques définitions (ch.I de Fortin, 2001)

- Erreur absolue**

– Si un nombre réel x est approximé par x^* alors l'erreur absolue est

$$\Delta x = |x - x^*|$$

- Erreur relative**

* Si un nombre réel x est approximé par x^* , alors l'erreur relative est

$$\Delta x = \frac{|x - x^*|}{|x|}$$

Représentations des entiers

- Représentation décimale avec un nombre p de chiffres significatifs:

$$(x)_{10} = a_{p-1}10^{p-1} + a_{p-2}10^{p-2} + \dots + a_110^1 + a_010^0 \\ \equiv (a_{p-1} \ a_{p-2} \ \dots \ a_1 \ a_0)_{10}$$

- Exemple:**

$$3453 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

- Représentation binaire avec un nombre p de chiffres significatifs:**

$$(x)_2 = a_{p-1}2^{p-1} + a_{p-2}2^{p-2} + \dots + a_12^1 + a_02^0 \\ (3453)_{10} = (110101111101)_2$$

Représentation binaire avec 12 bits

Représentation des nombres réels

- Considère le nombre $3453.24 = 0.345324 \times 10^4$ et ainsi $(3453.24)_{10} = (3 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-5} + 4 \times 10^{-6}) \times 10^4$
- L'exposant E représentant le maximum de ce nombre est la partie entière du $\log_{10} 3453.24 = 3.538$ à laquelle on ajoute 1.
- Cas binaire: $E = \text{int}(\log_2 3453.24) + 1 = 12$

$$(x)_2 = a_{p-1}2^{p-1} + a_{p-2}2^{p-2} + \dots + a_12^1 + a_02^0 \\ = (a_{p-1}2^{-1} + a_{p-2}2^{-2} + \dots + a_12^{1-p} + a_02^{-p}) \times 2^p$$

- Exception pour $x = 0$
(car logarithme $\rightarrow \infty$ dans ce cas)

Représentation discrète des nombres réels

Base: β Précision: p Exposant: $L < E < U$

$$x = \pm \left(\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_p}{\beta^p} \right) \beta^E$$

Mot de 32 bit

- 7 bit pour l'exposant
- 1 bit pour le signe de l'exposant
- 23 bit pour la mantisse
- 1 bit pour le signe
- **Exposant:** $-2^7 \leq E \leq 2^7 \Rightarrow -127 \leq E \leq +127$

SCA-4011 Hiver 2011: Modélisation numérique des écoulements continus et discontinus

- Définition numérique de l'infini et de zéro

- Infini: $2^{128} \sim 10^{+38}$
- Zéro: $2^{-128} \sim 10^{-38}$
- $x < \text{Zéro} \Rightarrow$ 'Underflow'
- $x > \text{Infini} \Rightarrow$ 'Overflow'

Dans les deux cas, $x = \text{NaN}$ ('Not a Number')

- Erreur d'arrondi et de troncature

- Erreur absolue: $A = \beta^{E-p}$
- Erreur relative: $r = A/x = \beta^{E-p}/\beta^{E-1} = \beta^{1-p}$

- Standard IEEE (Institute of Electronic and Electrical Engineers):

$\beta = 2$

Norme IEEE

- Représentation normalisée des nombres dans la base 2 implique nécessairement que $d_1 = 1$: il est donc omis dans la représentation
 - La représentation est donc telle que

$$(d_1 \ d_2 \ \dots \ d_{32})_2 = (-1)^{d_1} 2^{(d_2 \ d_3 \ \dots \ d_9)} 2^{-127} (1 \ d_{10} \ d_{11} \ \dots \ d_{32})_2$$

- Exposant comprend 7 bits dont 1 pour le signe
- Mantisse comprend 24 bit mais le premier n'est qu'implicitement représenté donc 23 bits réels

Représentation des nombres réels

	Mot (bits)	Exp. (bits)	Mantisse (bits)	β	p	L	U	Erreur relative
Cray (simple)	64	13	48	2	48	-8192	8191	10^{-15}
Cray (double)	128	13	96	2	96	-8192	8191	10^{-29}
IEEE (simple)	32	7	23	2	24	-125	128	10^{-7}
IEEE (double)	64	10	52	2	53	-1021	1024	10^{-16}
IBM (simple)	32	6	24	16	6	-64	63	10^{-6}
IBM (double)	64	6	56	16	14	-64	63	10^{-16}

Opérations élémentaires

- Addition ($\beta = 10$)

$$y = 0.100000 \times 10^1 \qquad z = 0.415789 \times 10^{-3}$$

Réduction de z pour que la base corresponde à celle de y

$$z = 0.000041 \times 10^1$$

$$y + z = .100041 \times 10^1 \Rightarrow \text{Perte de précision}$$

- Règle générale: sommer les éléments les plus petits en premier
- Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2 / 6 = 1.6449341583 \ 971488 \dots$$

SCA-4011 Hiver 2011: Modélisation numérique des écoulements continus et discontinus

Evaluation de l'intégrale $E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$

Intégrations par parties

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx = x^n e^{x-1} \Big|_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx$$

$$= 1 - n(E_{n-1} + \varepsilon)$$

- Pour $n = 1$, $E_1 = 1/e$.
- Erreur numérique est multipliée par n à chaque itération

Borne supérieure: $E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$

$E_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc: $E_{n-1} = \frac{(1 - E_n - \varepsilon)}{n}$

N	$E_n (1 \rightarrow n)$	$E_n (N=20 \rightarrow 1)$
1	0.36787945	0.36787945
2	0.264241099	0.264241129
3	0.207276702	0.207276642
4	0.170893192	0.170893401
5	0.145534039	0.145532951
6	0.126795769	0.126802355
7	0.112429619	0.1123835
8	0.100563049	0.100931972
9	$9.493255615 \times 10^{-2}$	$9.161229432 \times 10^{-2}$
10	$5.067443848 \times 10^{-2}$	$8.387707174 \times 10^{-2}$
11	0.442581177	$7.735223323 \times 10^{-2}$
12	-4.31097412	$7.177325338 \times 10^{-2}$
13	57.0426636	$6.694770604 \times 10^{-2}$
14	-797.59729	$6.273216754 \times 10^{-2}$
15	11964.959	$5.90175651 \times 10^{-2}$
16	-191438.344	$5.571895465 \times 10^{-2}$
17	3254452.75	$5.277777836 \times 10^{-2}$
18	-58580148.	$5.000000075 \times 10^{-2}$
19	$1.113022848 \times 10^{+9}$	$5.000000075 \times 10^{-2}$
20	$-2.226045747 \times 10^{+10}$	0.

Récurrance inversée

$$E_{n-1} = (1 - E_n)/n$$

Pose que $E_{20} = 0$.

- Erreur est amortie par un facteur $1/N^K$
- Pour $N = 20$ et $K = 5$, $1/N^K \sim 10^{-7}$
- Récurrance directe est un algorithme instable qui amplifie l'erreur d'arrondi
- Récurrance inversée est stable

Exemple: test du gradient

But: vérifier l'exactitude du calcul du gradient d'une fonction

Fonction: $J(x) = \alpha x^2 + x$
 Dérivée: $dJ/dx = 2 \alpha x + 1$

Développement en série de Taylor

$$J(x_0 + \varepsilon) - J(x_0) = \varepsilon (dJ/dx)(x_0) + \alpha \varepsilon^2$$

Test du gradient

$$R = \frac{J(x_0 + \varepsilon) - J(x_0)}{\varepsilon J'(x_0)} = 1 + \varepsilon \frac{\alpha}{J'(x_0)}$$

p	10^{-p}	R	$J(x_0 + \varepsilon) - J(x_0)$
0	1.	1.333333373	0.400000E+01
1	10^{-1}	1.033333063	0.310000E+00
2	10^{-2}	1.003329039	0.300999E-01
3	10^{-3}	1.000404358	0.300121E-02
4	10^{-4}	0.999768615	0.299931E-03
5	10^{-5}	1.001358032	0.300407E-04
6	10^{-6}	0.953674257	0.286102E-05
7	10^{-7}	1.589457154	0.476837E-06
8	10^{-8}	0.000000000	0.000000E+00

Résumé et conclusion

- Représentation discrète des nombres introduit une erreur causée par la troncature du nombre de décimales
- Précision dépend de la façon dont un nombre est représenté sur une architecture d'ordinateur particulière (e.g., mots de 32 ou 64 bits)
- Développement d'algorithmes pour évaluer des quantités mathématiques doit prendre en compte l'erreur de troncature
 - Stabilité d'un algorithme implique qu'il n'y a pas d'amplification de cette erreur d'arrondi